PREMIERE PARTIE

On pose $B(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt$.

1) Pour quels couples (u,v) de R^2 cette intégrale est-elle définie ? On note D ce sous-ensemble de R^2.

2) Calculer $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

3) Prouver que pour tout couple (u,v) de D, B(v,u) = B(u,v).

4) Prouver que pour tout couple (u,v) de D, B(u,v) = B(u + 1, v) + B(u, v + 1).

5) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que pour tout couple (u,v) de D : $B(u+1,v)=\frac{u}{u+v}B(u,v)$

6) En déduire l'expression de B(u+n,v) en fonction de B(u,v) pour tout entier naturel non nul n.

7) Calculer B(n,p), $(n,p) \in N^* \times N^*$.

8) Calculer $B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. On pourra poser le changement de variable : $t=\frac{1}{1+x^3}$

DEUXIEME PARTIE

Soit $(n,p)\in N^* \times N^*$ avec n > p et q = n-p.

Pour tout x de R, on considère l'équation d'inconnue y : (E) $y^n + xy^p - 1 = 0$

Soit enfin la fonction $\begin{cases} g : R_+^* \to R \\ y \to y^{-p} - y^q \end{cases}$

1) Démontrer que, $\forall x \in R$, l'équation (E) admet une unique racine y dans R_+^* qu'on nomme f (x) par la suite. On définit ainsi une fonction $\begin{cases} f : R \to R_+^* \\ x \to f(x) = y \end{cases}$

2) Montrer que f est de classe C^∞ sur R et donner l'expression de f ' (x) en fonction de y = f (x).

3) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On donnera sa partie principale sous la forme : $\sum_{k=0}^{2}\frac{a_k}{(p+q)^k}\frac{x^k}{k!}$, a_0, a_1, a_2 étant 3 constantes dépendant de p et de q à déterminer.

4) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

5) Prouver que $f(x) \sim x^{-\frac{1}{p}}$ au voisinage de $+\infty$.

6) Soit $(\mu, \nu) \in R \times R$. Etudier, suivant les valeurs de μ et ν, la convergence de l'intégrale :

$$I(\mu, \nu) = \int_0^{+\infty} [f(x)]^{\mu} x^{\nu - 1} dx$$

7) Justifier qu'on peut poser $y = f(x)$ dans l'intégrale précédente et en déduire :

$$I(\mu, \nu) = \int_0^1 y^{\mu - p\nu - 1} \left(1 - y^n\right)^{\nu - 1} \left(a + by^n\right) dy ,$$

a et b étant deux constantes dépendant de p et q que l'on déterminera.

8) Montrer que $I(\mu, \nu) = \frac{\mu}{\mu + c\nu} B\left(\frac{\mu - p\nu}{n}, \nu\right)$ où c est une constante dépendant de q que l'on déterminera.

9) Calculer l'intégrale $J(\mu, \nu) = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right)^{\mu} x^{\nu - 1} dx$ pour $0 < \nu < \mu$.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, a et c sont des paramètres. $a \in R$; $c \in R \setminus Z$.

On considère la fonction $\Phi_{a,c}$: $\begin{cases} R \to R \\ x \to \Phi_{a,c}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \frac{x^n}{n!} \end{cases}$ où $v_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)}$

On dira que f est solution du problème P sur un intervalle I si :
a) f est de classe C^2 sur I.
b) la fonction $x \to xf'' + (c - x)f' - af$ est constante sur I.

1) Dans quels cas $\Phi_{a,c}$ est-elle un polynôme ?

2) Déterminer l'ensemble de définition de $\Phi_{a,c}$.

3) Montrer que $\Phi_{a,c}$ est solution du problème P sur R.

4) On pose $\alpha = a - c + 1$ et $\beta = 2 - c$.
Montrer que $\Psi(x) = x^{1-c}\,\Phi_{\alpha,\beta}(x)$ est solution du problème P sur $]0;+\infty[$.

5) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $xy'' + (c - x)y' - ay = 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

6) Montrer que $f(x) = e^{x}\Phi_{c-a,c}(-x)$ est solution de P sur R.

7) Montrer que $f = \Phi_{a,c}$ sur $]0 ; +\infty[$.

8) En déduire que $f = \Phi_{a,c}$ sur R.

QUATRIEME PARTIE

Comme dans la partie III, a et c sont des paramètres. $a \in R$; $c \in R \setminus Z$. On a de plus $a \geq 1$ et $c - a \geq 1$.

1) Montrer que $\forall\ x \in R,\ \Phi_{a,c}(x) = \dfrac{1}{B(a\ ,\ c-a)} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} B(a+n\ ,\ c-a)\dfrac{x^n}{n!}$

2) Montrer que $\forall\ x \in R,\ \Phi_{a,c}(x) = \dfrac{1}{B(a\ ,\ c-a)} \displaystyle\int_0^1 e^{xt}\,t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt$

3) Retrouver à partir de cette formule les résultats de la troisième partie, question 8.

4) Calculer la limite de $\Phi_{a,c}$ quand x tend vers $-\infty$.

5) Trouver une relation simple entre $\Phi'_{a,c}(x)$ et $\Phi_{a+1,c+1}(x)$.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de $\Phi_{a,c}$ pour $a \geq 1$ et $c - a \geq 1$. On précisera notamment le comportement en $+\infty$ ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.

7) Ecrire $A = \Phi_{2,\frac{7}{2}}(1)$ comme somme d'une série alternée. En déduire un encadrement de A d'amplitude 10^{-4}. On négligera les erreurs d'arrondis dues à l'usage des calculatrices.